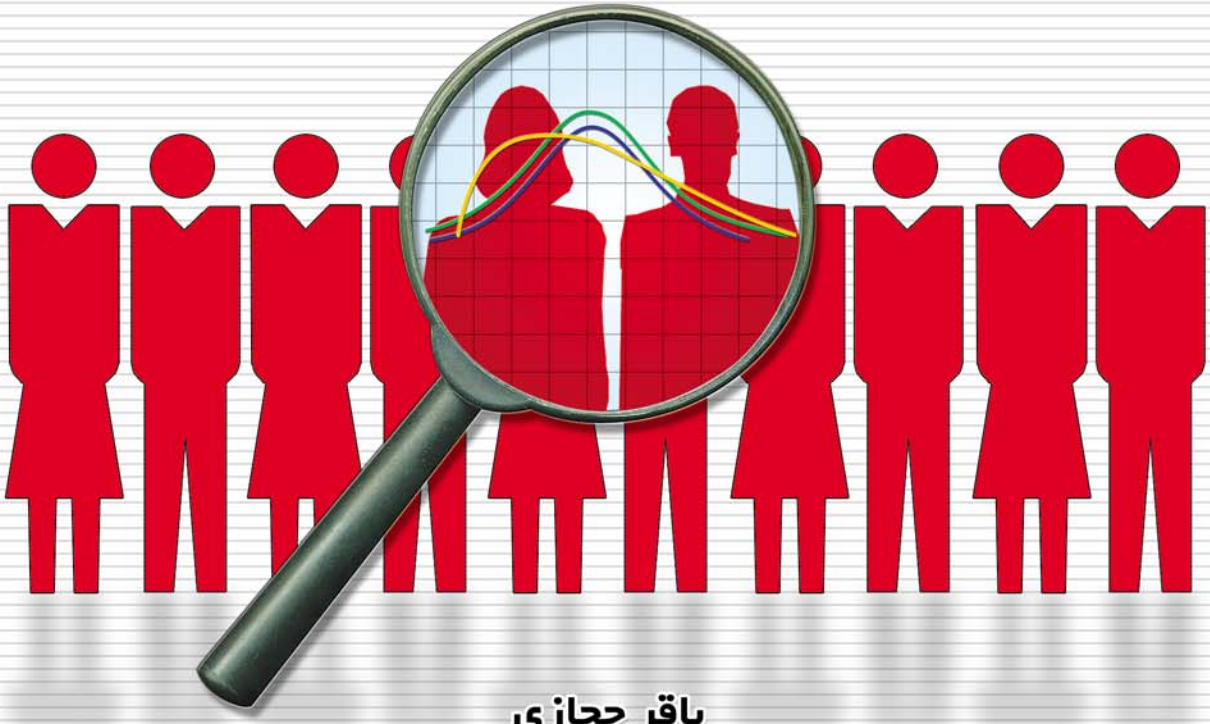
آمار توصیفی

در روان‌شناسی و علوم تربیتی



باقر حجازی

عضو هیئت علمی دانشگاه تهران

به نام خدا

آمار توصیفی

در روان‌شناسی و علوم تربیتی

مؤلف: باقر حجازی

عضو هیئت علمی

دانشکده روانشناسی و علوم تربیتی دانشگاه تهران

Descriptive Statistics in Psychology & Educational Sciences

سرشناسه : حجازی، باقر ، ۱۳۲۵.
عنوان و پدیدآور : آمار توصیفی در روان‌شناسی و علوم تربیتی/ مؤلف باقر حجازی.
مشخصات نشر : تهران: سارگل، ۱۳۸۷.
مشخصات ظاهری : [۱۴۵] ص.: جدول، نمودار.
شابک : 978-964-5890-77-1
وضعیت فهرست‌نویسی : فیپا
موضوع : روان‌شناسی -- روش‌های آماری.
موضوع : آمار.
رده‌بندی کنگره : ۱۳۸۷ ۸آ۳ح/BF۳۹
رده‌بندی دیویی : ۱۵۰/۷۲
شماره کتاب‌شناسی ملی : ۱۳۰۹۶۲۹

حق هر گونه چاپ و تکثیر (به هر طریق ممکن) برای نشر سارگل محفوظ است.

نام کتاب : آمار توصیفی در روان‌شناسی و علوم تربیتی
مؤلف : باقر حجازی
ویراستار : سیمه شریعتی‌راد
ناشر : سارگل
نوبت چاپ : اول - ۱۳۸۷
تیراژ : ۲۰۰۰
شابک : ۹۷۸-۹۶٤-۵۸۹۰-۷۷-۱
قیمت : ۳،۵۰۰ تومان

نشر سارگل: تهران- میدان فاطمی- خیابان یکم- پلاک ۱۴ - طبقه پنجم
تلفن : ۸۸۹۸۳۳۲۴ نمابر: ۸۸۹۵۰۴۷۵
تلفن دفتر روابط عمومی و فروش: ۱۳-۸۸۹۸۳۴۱۱
www.sargolpub.com

فهرست مطالب

فصل اول

تعریف علم آمار ۱

مقیاس‌های اندازه‌گیری (روش‌های اندازه‌گیری) ۲

اندازه‌گیری اسمی (طبقه‌ای) ۲

اندازه‌گیری رتبه‌ای (ترتیبی) ۳

اندازه‌گیری فاصله‌ای ۴

اندازه‌گیری نسبی (نسبتی) ۵

متغیرها و اندازه‌گیری آنها ۵

علامت مجموع (Σ) ۷

تمرین‌های فصل اول ۱۰

فصل دوم

تنظیم داده‌ها ۱۳

نظم رتبه‌ای ۱۳

توزیع فراوانی ۱۴

توزیع فراوانی طبقه‌ای (گروهی) ۱۶

ترسیم داده‌ها یا رسم نمودار ۱۹

نمودار میله‌ای ۲۱

نمودار دایره‌ای ۲۲

نمودار ستونی (هیستوگرام) ۲۴

نمودار چندضلعی ۲۵

نمودار منحنی ۲۷

چندک‌ها ۳۰

محاسبه صدک‌ها ۳۲

صدک متناظر با نمره ۳۴

تمرین‌های فصل دوم ۳۶

فصل سوم

اندازه‌های گرایش به مرکز (مقادیر متوسط) ۳۹

نما ۳۹

ویژگی‌های نما ۴۱

میانه ۴۲

ویژگی‌های میانه ۴۴

میانگین ۴۶

محاسبه میانگین با استفاده از متغیر فرضی ۴۸

میانگین گروه‌های مرکب ۴۹

میانگین هندسی ۵۰

میانگین همساز (هارمونیک) ۵۱

ویژگی‌های میانگین ۵۲

تمرین‌های فصل سوم ۵۵

فصل چهارم

اندازه‌های پراکندگی ۵۷

دامنه تغییرات (نمره‌ها) ۵۸

دامنه صدکی نودم به صدکی دهم ۵۹

چارکی متوسط (انحراف چارکی) ۵۹

میانگین انحرافات (انحراف متوسط) ۶۰

ویژگی‌های میانگین انحرافات ۶۲

واریانس ۶۳

انحراف معیار (استاندارد) ۶۶

تصحیح شپرد ۶۷

ضریب پراکندگی ۶۸

ویژگی‌های واریانس و انحراف معیار ۶۹

عوامل مؤثر بر پراکندگی ۷۲
نمره‌های استاندارد (معیار) ۷۲
ویژگی‌های نمره‌های استاندارد ۷۵
کجی (چولگی) ۷۵
بلندی (کشیدگی) ۷۷
تمرین‌های فصل چهارم ۷۹

فصل پنجم

توزیع نرمال (طبیعی) ۸۱
ویژگی‌های منحنی طبیعی ۸۴
کاربرد منحنی و جدول توزیع طبیعی ۸۴
تمرین‌های فصل پنجم ۹۰

فصل ششـــم

ارتباط (همبستگی) ۹۳
ارتباط مستقیم کامل ۹۴
ارتباط کامل معکوس ۹۵
ارتباط مستقیم ناکامل ۹۶
ارتباط معکوس ناکامل ۹۶
عدم ارتباط بین دو متغیر ۹۷
حدود ارزش‌ها و جهت ارتباط (همبستگی) ۹۸
روش محاسبه ضریب همبستگی پیرسون ۹۸
تأثیر نمره‌های تبدیل شده روی r_{xy} ۱۰۳
رسم دیاگرام پراکندگی دو متغیر ۱۰۴
ویژگی‌های ضریب همبستگی پیرسون ۱۰۴
تمرین‌های فصل ششم ۱۰۶

فصل هفتم

روش‌های دیگر ضریب همبستگی ۱۰۹
محاسبه Ø با استفاده از نسبت‌ها ۱۱۱
محاسبه Ø با استفاده از جدول توافق ۲×۲ ۱۱۲
ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن (r_s) ۱۲۶
تمرین‌های فصل هفتم ۱۳۱

جداول ۱۳۵

فهرست منابع ۱۴۵

مقدمه

امروزه در هر پژوهش تجربی که با عدد و رقم (داده) سر و کار دارد بدون آمار نمی‌توان به تحلیل و نتیجه‌گیری درست و دقیقی رسید. آمار توصیفی بخشی از آمار است که توسط آن می‌توان به تنظیم، خلاصه کردن و محاسبه شاخص‌های آماری مجموعه‌ای از داده‌ها پرداخت به نحوی که بتوان به وسیله آن به توصیف نتایج رسید.

با این که تحلیل و نتیجه‌گیری خاصی در آمار توصیفی صورت نمی‌گیرد و فقط به توصیف نتایج می‌پردازد ولی بدون درک درست مفاهیم آن نمی‌توان به مباحث پیچیده آمار تسلط کافی پیدا کرد. به عبارت دیگر، مشکل بسیاری از دانشجویانی که در زمینه آمار نمی‌توانند به تسلط کافی برسند آن است که مفاهیم اولیه آمار در درس آمار توصیفی درست شکل نگرفته است.

به عبارت دقیق‌تر می‌توان گفت آمار توصیفی زیربنا و پایه و اساس هر بحث آماری است. در این کتاب سعی شده است مفاهیم و روش محاسبه شاخص‌های آمار توصیفی به ساده‌ترین شکل ارائه شود.

۲۵ سال است که تدریس دروس آمار را به عهده دارم. در حدود ۱۵ سال اول از منابع موجود برای تدریس آمار توصیفی استفاده کردم ولی به دلایلی که توضیح داده خواهد شد ناچار جزوه‌ای تهیه و در ۱۰ سال گذشته از آن برای تدریس استفاده نمودم و اکنون بنا به توصیه دوستان و دانشجویان تصمیم به چاپ آن گرفته‌ام.

– این درس اگر بخواهد درست تدریس شود و به سرفصل‌های مصوب برسد باید به صورت یک درس ۳ واحدی ارائه گردد. بنابراین چون در برنامه گرایش‌های مختلف درس آمار توصیفی به صورت ۲ واحد ارائه شده، کتاب‌های موجود نیز برای ۲ واحد تألیف و بدین ترتیب نمی‌توان به اهداف درس رسید. در این صورت ایجاب می‌کند بخشی از آمار توصیفی در آمار استنباطی ارائه شود.

– در بیشتر کتاب‌های آمار، مباحث توصیفی و استنباطی در یک مجله ارائه شده که در اکثر آنها آمار توصیفی تحت تأثیر مباحث استنباطی قرار گرفته و آن طور که باید به آن نپرداخته‌اند.

– برنامه اکثر گرایش‌های روانشناسی و علوم تربیتی تغییر و مورد بازنگری قرار گرفته و یا در حال تغییرات و تعداد واحد این درس از ۲ به ۳ (۱+۲) افزایش یافته است. بنابراین، می‌طلبد که محتوایی برای ۳ واحد تنظیم شود (محتوای این کتاب بدین منظور برای ۳ واحد تنظیم شده است).

– در تدوین این کتاب کوشش شده به سؤال‌های کنکور کارشناسی ارشد سال‌های قبل توجه شود تا پوشش مناسبی باشد از مفاهیمی که در کنکور ارشد مورد سؤال واقع می‌شود.

– مطالب این کتاب تطبیقی از محتواهای مختلفی است که در این زمینه وجود دارد، بنابراین سعی شده مفهومی ناگفته نماند.

– برای تمرین و کار بیشتر دانشجویان، جهت شکل‌گیری بهتر مفاهیم در هر فصل تعداد زیادی سؤال متنوع ارائه گردیده است.

امید است متن حاضر بتواند اهداف مورد نظر را پوشش دهد.

باقر حجازی
عضو هیئت علمی
دانشکده روانشناسی و علوم تربیتی دانشگاه تهران

فصل اول

تعریف علم آمار

به مجموعه روش‌هایی که به جمع‌آوری اطلاعات، منظم و خلاصه کردن، نمایش آنها به صورت نمودار، و در نهایت تجزیه و تحلیل اطلاعات می‌پردازد **علم آمار**[1] گفته می‌شود.

در قدیم از آمار برای به دست آوردن اطلاعات مورد نیاز دولت‌ها استفاده می‌شد ولی امروزه کلیه رشته‌های علمی که به نحوی با تحقیق و پژوهش سر و کار دارند باید برای نتیجه‌گیری از اطلاعات جمع‌آوری شده از روش‌های آماری بهره بگیرند.

آمار را یکی از شاخه‌های ریاضیات عملی می‌دانند. روش‌های آماری را به علت گستردگی به دو بخش تقسیم کرده‌اند: ۱) **آمار توصیفی**[2] و ۲) **آمار استنباطی**[3]

آمار توصیفی شامل جمع‌آوری، جدول‌بندی، ترسیم، محاسبه بعضی از شاخص‌های آمار توصیفی، و در نهایت توصیف اطلاعات جمع‌آوری شده است.

آمار استنباطی شامل مجموعه روش‌هایی است که با استفاده از آنها می‌توانیم نتایج به دست آمده از یک گروه کوچک (**نمونه**)[4] را به یک مجموعه بزرگ (**جامعه**)[5] تعمیم دهیم. استنباط آماری عبارت است از استدلال از جزء به کل.

---

1. statistics
2. descriptive statistics
3. inferential statistics
4. sample
5. population

مقیاس‌های اندازه‌گیری[1] (روش‌های اندازه‌گیری)

آمار با اعداد و ارقام سر و کار دارد. این اعداد و ارقام از طریق اندازه‌گیری متغیرها به دست می‌آیند. **اندازه‌گیری** به معنی اختصاص ارزش عددی به متغیرهای افراد، اشیا، و پیشامدها بر مبنای یک سری قواعد معین است. اندازه‌گیری، ادراکات ما را به اعداد تبدیل، و از این طریق درک پدیده‌ها را آسان می‌کند.

اعداد و ارقامی که از طریق اندازه‌گیری متغیرها به دست می‌آیند ماهیت یکسان ندارند. برخی از اعداد صرفاً کد یا نشانه محسوب می‌شوند که در آن صورت، ما گروهی از افراد یا اشیا را بر حسب یک متغیر با آن عدد و رقم می‌شناسیم و نمی‌توانیم هیچ گونه اندازه‌ای برای این اعداد قائل شویم. اما در اندازه‌گیری برخی دیگر از متغیرها می‌توان اعداد را بر اساس اندازهٔ آنها مرتب کرد. اصولاً هر عملیات ریاضی یا هر روش آماری را نمی‌توان برای هر عدد و رقمی مورد استفاده قرار داد. برای انجام محاسبات آماری لازم است ماهیت متغیر و روش اندازه‌گیری آن را بشناسیم تا بر این اساس بتوانیم روش آماری مناسب را انتخاب کنیم. برای اندازه‌گیری متغیرها چهار روش (**مقیاس**) به شرح زیر می‌توان در نظر گرفت:

اندازه‌گیری اسمی (طبقه‌ای)

اندازه‌گیری اسمی[2] یا طبقه‌ای همان طور که از نام آن پیداست، یعنی طبقه‌بندی افراد، اشیا یا رویدادها بر حسب یک ویژگی معین و اختصاص دادن نامی به هر یک از طبقات. به عنوان مثال طبقه‌بندی افراد از نظر جنسیت به مرد و زن و دادن عدد به هر یک از این نام‌ها (معمولاً روان‌شناسان با اختصاص عدد ۱ برای زن و عدد ۰ برای مرد جنسیت را مشخص می‌کنند). طبقه‌بندی افراد از نظر نژاد به سفید، سیاه، زرد، و سرخ و دادن عدد به هر یک از این طبقات نیز مثال دیگری از این نوع اندازه‌گیری است.

هر چند که در این روش به هر یک از طبقات عددی تعلق می‌گیرد اما به سختی می‌توان نام آن را اندازه‌گیری گذاشت چرا که در این اعداد و ارقام «اندازه» دیده نمی‌شود. در اندازه‌گیری اسمی، کمی و زیادی، بزرگی و کوچکی و به طور کلی مقایسه‌های نسبی بین اعداد و ارقام معنا ندارد. به

1. scales of measurement
2. nominal measurement

عنوان مثال اگر به نژاد سفید عدد (۱)، سیاه (۲)، زرد (۳) و به سرخ عدد (۴) بدهیم، می‌توانیم این اعداد و ارقام را با هم جمع، تفریق، و یا ضرب و تقسیم کنیم ولی از این‌گونه عملیات با این اعداد و ارقام معنایی به دست نمی‌آید. مثلاً: سفید به علاوه سیاه مساوی زرد نمی‌شود (۳=۲+۱). از سوی دیگر، عوض کردن اعداد داده شده به نژادهای مختلف نیز چیزی را تغییر نمی‌دهد. در این روش اعداد و ارقام در واقع کدها یا نشانه‌هایی هستند که گروه خاصی از افراد یا اشیا را با آنها می‌شناسیم. بنابراین انجام عملیات ریاضی (چهار عمل اصلی) روی این اعداد و ارقام مجاز نیست. کارهای آماری محدودی با اعداد این مقیاس می‌توان انجام داد.

اندازه‌گیری رتبه‌ای (ترتیبی)

در روش **اندازه‌گیری رتبه‌ای**[1] یا ترتیبی افراد، اشیا و رویدادها بر حسب یک ویژگی رتبه‌بندی می‌شوند. در این مقیاس بزرگی و کوچکی اعداد معنا پیدا می‌کند. با اعداد و ارقام این مقیاس می‌توانیم افراد و اشیا را از نظر یک ویژگی (مانند هوش، پیشرفت تحصیلی، زیبایی، بلندی، کوتاهی، سنگینی، و ...) به طور نسبی مقایسه کنیم. فرض کنید می‌خواهیم افراد را از نظر سرعت انجام کار رتبه‌بندی کنیم. اگر این افراد ۵ نفر باشند، به آن که زودتر از همه کارش را تمام کرده رتبه۱ و به دومی رتبه ۲ و به همین ترتیب رتبه ۳ و ۴ و ۵ می‌دهیم. این اعداد نشان می‌دهند که نفر اول زودتر از همه؛ و نفر پنجم دیرتر از همه کار خود را تمام کرده‌اند. نفر سوم سرعتش از دومی کمتر و از چهارمی بیشتر است.

در این مقیاس هر چند تفاوت رتبه‌ها یکسان است ولی فاصله‌های یکسان میان رتبه‌ها معنای یکسان ندارند. به عبارت دیگر، در مثال بالا نمی‌توانیم این گونه قضاوت کنیم که تفاوت نفر اول و دوم از نظر متغیر مورد اندازه‌گیری به اندازهٔ تفاوت نفر چهارم و پنجم است. این بدان معنا است که تفاوت بین رتبه‌ها مشخص نمی‌کند چه میزان تفاوت بین دو نفر وجود دارد. اعداد و ارقام این مقیاس در اصل حاکی از وجود تمایز میان افراد یا اشیا و بیانگر ترتیب قرار گرفتن آنها است. انجام عملیات ریاضی (چهار عمل اصلی) روی اعداد این مقیاس مجاز نیست و معنا پیدا نمی‌کند. مثلاً اگر رتبه نفر سوم را از رتبه نفر اول کم کنیم (۲=۱ـ۳) و تفاوت رتبه نفر چهارم و پنجم را به دست آوریم (۱=۴ـ۵) نمی‌توانیم به این نتیجه برسیم که نفر سوم و اول دو برابر نفر چهارم و

1. ordinal measurement

پنجم از نظر متغیر مورد اندازه‌گیری تفاوت دارند. به علت محدودیتی که در اعداد و ارقام این مقیاس وجود دارد روش‌های آماری محدودی را می‌توان روی آنها انجام داد. در یک تقسیم‌بندی کلی‌تر، مقیاس‌های طبقه‌ای و رتبه‌ای را **اندازه‌گیری کیفی** نیز می‌نامند.

اندازه‌گیری فاصله‌ای

اندازه‌گیری فاصله‌ای[1] دو ویژگی مشخص دارد: اولاً صفر آن اختیاری (قراردادی) است؛ و ثانیاً واحدهای اندازه‌گیری در طول مقیاس یکسان هستند. بنابراین در این مقیاس اگر اندازه شیء یا فردی در یک متغیر صفر باشد، بدان معنا نیست که شیء یا فرد مورد نظر فاقد آن ویژگی است. به عنوان مثال وقتی از آب صفر درجه صحبت می‌شود منظور آن نیست که این آب فاقد دما است. در اندازه‌گیری‌های روانی و تربیتی نیز نمره صفر یک دانش‌آموز مثلاً در دیکته بدین معنا نیست که او دیکتهٔ هیچ لغتی را نمی‌داند.

در اندازه‌گیری فاصله‌ای، اعداد هم دارای خاصیت اعداد رتبه‌ای هستند و هم فاصله بین آنها بیانگر میزان تفاوت ویژگی در افراد یا اشیا است. عملیات ریاضی مجاز در این مقیاس جمع و تفریق است. بهترین وسیله‌ای که برای این مقیاس می‌توان مثال زد دماسنج یا اندازه‌گیری دما است. مثلاً آب ۱۵ درجه از آب ۲۰ درجه ۵ درجه خنک‌تر است (۵ = ۱۵ـ۲۰)؛ یا اگر دمای آب ۱۵ درجه را ۵ درجه افزایش دهیم به دمای ۲۰ درجه می‌رسد (۲۰=۵+۱۵).

در این مقیاس نمی‌توانیم مقایسه‌های نسبتی داشته باشیم. مثلاً دمای آب ۲۰ درجه دو برابر آب ۱۰ درجه نیست، فقط می‌توانیم بگوییم این دو آب ۱۰ درجه اختلاف دما دارند. به عبارت دیگر، به دلیل وجود صفر اختیاری مجاز به مقایسه‌های نسبتی نیستیم. با اعداد و ارقام این مقیاس می‌توان تمام روش‌های آماری را انجام داد.

هر چند اندازه‌گیری‌های روانی و تربیتی صفر اختیاری دارند اما فاقد ویژگی دوم این مقیاس، یعنی واحدهای یکسان، هستند. بدین لحاظ نمی‌توان آنها را در این مقیاس قرار داد. اصولاً وقتی می‌خواهند کار آماری روی داده‌های روانی و تربیتی انجام دهند آنها را به صورت فاصله‌ای در نظر می‌گیرند تا بتوانند کارهای آماری دقیق‌تری ارائه دهند. ولی زمانی که می‌خواهند برای این گونه داده‌ها تعبیر و تفسیر ارائه کنند آنها را به صورت رتبه‌ای در نظر می‌گیرند.

1. interval measurement

اندازه‌گیری نسبی (نسبتی)

اندازه‌گیری نسبی یا **نسبتی**[1] تمام ویژگی‌های مقیاس فاصله‌ای را دارد با این تفاوت که در این مقیاس صفر مطلق نیز وجود دارد. صفر در این مقیاس معنای هیچ می‌دهد. وجود صفر مطلق این اجازه را می‌دهد که بتوانیم افراد و اشیا را از نظر متغیر مورد اندازه‌گیری به صورت نسبتی با هم مقایسه کنیم. اندازه‌گیری وزن، زمان، طول، و حجم در این مقیاس قرار می‌گیرند. اندازه‌گیری هر یک از این متغیرها با صفر شروع می‌شود و قبل از صفر اندازه‌ای وجود ندارد، در صورتی که قبل از صفر دماسنج مقادیری به صورت زیر صفر وجود دارد. به دلیل وجود صفر مطلق می‌توانیم بگوییم طول یک شیء ۳۰ سانتی‌متری دو برابر طول یک شیء ۱۵ سانتی‌متری است؛ یا برعکس، طول شیء ۱۵ سانتی‌متری نصف طول شیء ۳۰ سانتی‌متری است. انجام تمام عملیات ریاضی (چهار عمل اصلی) روی اعداد و ارقام این مقیاس مجاز است. کلیه عملیات آماری نیز با اندازه‌های این مقیاس قابل انجام هستند.

هرچه از مقیاس طبقه‌ای به نسبتی نزدیک‌تر می‌شویم اندازه‌گیری دقیق‌تر می‌شود. چون در مقیاس‌های فاصله‌ای و نسبی کمیت‌ها به صورت واحدهای دقیق معنا پیدا می‌کنند، این دو مقیاس را مجموعاً اندازه‌گیری کمّی می‌نامند. تبدیل اندازه‌ها در مقیاس‌ها از نسبی به طرف بالا شدنی است. به عبارت دیگر می‌توان اندازه‌های فاصله‌ای را به رتبه‌ای یا طبقه‌ای تبدیل کرد (مثلاً رتبه‌بندی نمرات دانش‌آموزان یک کلاس یا طبقه‌بندی آنها به صورت قبول یا رد)، اما عکس آن امکان‌پذیر نیست.

متغیرها و اندازه‌گیری آنها

در آمار با اعداد و ارقام کار داریم. اعداد و ارقام از اندازه‌گیری خصوصیات یا ویژگی‌های افراد واشیا که در اصطلاح علمی به آن **متغیر**[2] می‌گویند به دست می‌آید. به عنوان مثال قد، وزن، سرعت دویدن، هوش، استعداد، پیشرفت تحصیلی، نگرش، تعداد، یا فراوانی مردان، زنان، و کودکان، و تعداد کتاب‌ها واتومبیل‌ها متغیر هستند. ماهیت متغیرها حکم می‌کند که در اندازه‌گیری بعضی از آنها فقط تعداد یا شمارش داشته باشیم. به این دسته از متغیرها، **متغیرهای ناپیوسته** [3] (**گسسته**) می‌گویند. تعداد زنان و تعداد ماشین‌ها از این دسته متغیرها هستند. در اندازه‌گیری این گونه متغیرها نمی‌توانیم اعشار داشته باشیم، اما می‌توانیم اندازه واقعی متغیر را به دست آوریم.

1. ratio measurement
2. variable
3. discrete variables

دسته دیگری از متغیرها اعشار پذیرند. با داشتن ابزار مورد نظر، آزماینده می‌تواند مقادیر مختلف اعشار را در اندازه‌گیری این گونه متغیرها به دست آورد. مثلاً، اگر زمان‌سنجی داشته باشیم که زمان واکنش را تا یک صدم ثانیه نشان دهد، می‌توانیم اعدادی تا دو رقم اعشار (۴/۵۶ ثانیه) به دست آوریم. به این دسته از متغیرها، **متغیرهای پیوسته**[1] می‌گویند. زمان، طول، سن و وزن از این دسته متغیرها هستند. متغیرهای روانی و تربیتی مانند هوش، استعداد، نگرش، علاقه، و ... نیز جزو متغیرهای پیوسته‌اند. اگر ما نمی‌توانیم در اندازه‌گیری آنها اعشار داشته باشیم به علت نداشتن شناخت کافی از آنها و در اختیار نداشتن ابزارهایی است که بتوانند مقادیر مختلف اعشاری را نشان دهند.

با پیشرفت تکنولوژی و ساختن ابزارهای دقیق اندازه‌گیری هر روز شاهد اندازه‌گیری دقیق‌تر متغیرهای پیوسته هستیم. با این همه در اندازه‌گیری متغیرهای پیوسته هیچ‌گاه نمی‌توانیم **ارزش واقعی**[2] متغیر را بدانیم. آنچه به وسیله ابزارهای اندازه‌گیری به دست می‌آید اندازه یا **ارزش گزارش شده**[3] (مشاهده شده) است. اگر بخواهیم اندازه یا ارزش واقعی متغیر را داشته باشیم باید ابتدا واحد اندازه‌گیری را نصف، و سپس یک بار به ارزش گزارش شده اضافه و یک بار از آن کم کنیم تا حدود ارزش واقعی به دست آید. به همین خاطر، در اندازه‌گیری متغیرهای پیوسته فقط می‌توانیم **حدود ارزش واقعی** را به دست آوریم.

متغیر	ارزش گزارش‌شده	دقت وسیله اندازه‌گیری (واحد اندازه‌گیری)	حدود ارزش واقعی
زمان واکنش	۱۵/۲ ثانیه	۰/۱ ثانیه	۱۵/۱۵_۱۵/۲۵ ثانیه
وزن	۲۵/۴۳ گرم	۰/۰۱ گرم	۲۵/۴۲۵_۲۵/۴۳۵ گرم
طول	۱۲ سانتی‌متر	۱ سانتی‌متر	۱۱/۵_۱۲/۵ سانتی‌متر

نحوه محاسبه بدین صورت است که مثلاً در مورد زمان واکنش، ابتدا واحد اندازه‌گیری را نصف می‌کنیم (۰/۰۵=۲÷ ۰/۱). سپس ۰/۰۵ را یک بار از ۱۵/۲ کم و یک بار به آن اضافه می‌کنیم تا حدود ارزش واقعی به دست آید.

$$۱۵/۲ \pm ۰/۰۵ = \begin{cases} ۱۵/۱۵ \\ ۱۵/۲۵ \end{cases}$$

1. continuous variables
2. actual value
3. reported value

علامت مجموع (Σ)

علامت مجموع (Σ) در اکثر فرمول‌هایی که در محاسبات آماری مورد استفاده قرار می‌گیرد وجود دارد. علت آن است که اکثر شاخص‌های آماری ابتدا از طریق محاسبه مجموع نمرات به دست می‌آیند. داشتن اطلاعات مختصری در این زمینه به درک بهتر فرمول‌ها و اثبات آنها کمک می‌کند.

برای مشخص کردن یک سری از اعداد به صورت علامت از حروف لاتین استفاده می‌شود. به عنوان مثال، برای نشان دادن نمره افراد در یک متغیر از علامت‌هایی مانند X، Y، Z و ... استفاده می‌شود و با قراردادن **زیرنویس**[1] (**اندیس**) مشخص می‌کنند که نمره برای چه فردی است. مثلاً X_i را به صورت «X اندیس i» می‌خوانند. اگر به جای زیرنویس (اندیس) عدد قرار دهیم مشخص می‌کند نمره به چه فردی تعلق دارد. به عنوان مثال X_5 را به صورت «نمره نفر پنجم» و X_3^2 را به صورت «مجذور نمره نفر سوم» می‌خوانیم؛ یا اگر گروهی مرکب از n عدد داشته باشیم می‌توانیم آن را به صورت $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ نشان دهیم. بدین‌ترتیب X_i مشخص کننده نمره فردی است که اگر شماره آن فرد به جای اندیس i قرار گیرد نشان می‌دهد نمره به چه کسی تعلق دارد.

حال اگر بخواهیم مجموع نمرات یک گروه ۵ نفره را با علامت نشان دهیم می‌توانیم آن را به شکل زیر بنویسیم:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = \sum_{i=1}^{5} X_i$$

علامت (Σ) حرف یونانی زیگما (سیگما) است که به جای کلمه «مجموع» به کار می‌رود. به عنوان مثال«مجموع نمرات نفرات اول تا پنجم» را با علامت $\sum_{i=1}^{5} X_i$ نشان دهیم. در اصل از این علامت مفهوم همان کلام نتیجه می‌شود.

به همین ترتیب، علامت $\sum_{i=3}^{5} X_i$ را به صورت «مجموع نمرات نفرات سوم تا هفتم» می‌خوانیم. استفاده از علائم به جای کلمات نوعی خلاصه‌نویسی است. بنابراین، با آشنایی بیشتر با مفهوم علامت زیگما (Σ) به راحتی می‌توان علائم و اشاراتی مانند موارد زیر را درک کرد:

«مجموع نمرات نفر چهارم تا ششم» $\longrightarrow$ $\sum_{i=4}^{6} X_i = X_4 + X_5 + X_6$

1. subscript

$$X_۳ + X_۴ + X_۵ + X_۶ + X_۷ = \sum_{i=۳}^{۷} X_i$$ ⟵ «مجموع نمرات نفر سوم تا هفتم»

$$\sum_{i=۵}^{۹} ۲X_i = ۲X_۵ + ۲X_۶ + ۲X_۷ + ۲X_۸ + ۲X_۹$$ ⟵ «مجموع دو برابر نمرات نفر پنجم تا نهم»

یا علا مت $\sum_{i=۱}^{n} X_i$ را می‌خوانیم «مجموع نمرات تمام افراد» که البته n مشخص‌کننده تعداد کل افراد است. در صورتی که تعداد کل افراد مشخص شود، به جای n عدد قرار می‌گیرد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$X_۱ + X_۲ + X_۳ + \ldots\ldots\ldots\ldots + X_n = \sum_{i=۱}^{n} X_i$$

حال اگر هر یک از n عدد را در مقدار ثابتی مثلاً ۳ ضرب کنیم و حاصل جمع را به صورت علامت بنویسیم، خواهیم داشت:

$$۳X_۱ + ۳X_۲ + ۳X_۳ + \ldots\ldots\ldots\ldots + ۳X_n = \sum_{i=۱}^{n} ۳X_i$$

و اگر در سمت چپ تساوی از ۳ فاکتور بگیریم خواهیم داشت:

$$۳(X_۱ + X_۲ + X_۳ + \ldots\ldots\ldots\ldots + X_n) = ۳\sum_{i=۱}^{n} X_i$$

بنابراین «مجموع سه برابر نمرات تمام افراد» $\sum_{i=۱}^{n} ۳X_i$ با «سه برابر مجموع نمرات تمام افراد» یعنی $\left(۳\sum_{i=۱}^{n} X_i\right)$ یکی است:

$$\sum_{i=۱}^{n} ۳X_i = ۳\sum_{i=۱}^{n} X_i$$

بنابراین، اگر مقدار ثابتی مانند C (C می‌تواند هر عددی باشد) در همه نمرات ضرب شود خواهیم داشت:

$$CX_۱ + CX_۲ + \ldots\ldots\ldots\ldots + CX_n = \sum_{i=۱}^{n} CX_i = C\sum_{i=۱}^{n} X_i \qquad (۱)$$

و اگر مقدار ثابتی به هر عدد اضافه کنیم خواهیم داشت:

$$(X_۱ + C) + (X_۲ + C) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (X_n + C) = \sum_{i=۱}^{n} (X_i + C)$$

و به همین ترتیب:

$$\sum_{i=۱}^{n}(X_i + C) = \sum_{i=۱}^{n} X_i + \sum_{i=۱}^{n} C = \sum_{i=۱}^{n} X_i + nC \qquad (۲)$$

و اگر بخواهیم یک سری اعداد مجذور (به توان دو) شده را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$X_۱^۲ + X_۲^۲ + ...X_۸^۲ = \sum_{i=۱}^{۸} X_i^۲$$

و می‌خوانیم «مجموع مجذور نمرات اول تا هشتم».

گاه نمرات را ابتدا جمع می‌کنیم و سپس مجموع نمرات را به توان دو می‌رسانیم. به این ترتیب:

$$(X_۱ + X_۲ + X_۳ + ... + X_۸)^۲ = \left(\sum_{i=۱}^{۸} X_i\right)^۲$$

و در این صورت می‌خوانیم «مجذور مجموع نمرات اول تا هشتم».

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\sum_{i=۱}^{۸} X_i^۲$ و $\left(\sum_{i=۱}^{۸} X_i\right)^۲$ دو مفهوم مجزا هستند و با یکدیگر تفاوت دارند. حال اگر ابتدا به هر یک از سری اعداد یک مقدار ثابت اضافه کنیم و سپس مقادیر به دست آمده را به توان ۲ برسانیم $(X_i+c)^۲$ و در نهایت مجموع آنها را به دست آوریم خواهیم داشت:

$$(X_۱ + C)^۲ + (X_۲ + C)^۲ + ... + (X_n + C)^۲ = \sum_{i=۱}^{n}(X_i + C)^۲$$

و از این عبارت می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\sum_{i=۱}^{n}(X_i + C)^۲ = \sum_{i=۱}^{n}(X_i^۲ + C^۲ + ۲CX_i)$$

سپس، اگر Σ را در داخل پرانتز ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$= \sum_{i=۱}^{n} X_i^۲ + \sum_{i=۱}^{n} C^۲ + \sum_{i=۱}^{n} ۲CX_i = \sum_{i=۱}^{n} X_i^۲ + nC^۲ + ۲C\sum_{i=۱}^{n} X_i$$

و بنابراین:

$$\sum_{i=۱}^{n}(X_i + C)^۲ = \sum_{i=۱}^{n} X_i^۲ + ۲C\sum_{i=۱}^{n} X_i + nC^۲ \qquad (۳)$$

زیگما و مفهوم آن کاربردهای گسترده‌تری در روش‌های آماری دارد، ولی در آمار توصیفی به همین حد بسنده می‌شود.

تمرین‌های فصل اول

۱ ـ اندازه‌گیری هر یک از متغیرهای داده شده در کدام مقیاس اندازه‌گیری قرار می‌گیرد؟

الف) رشته تحصیلی: پزشکی، ریاضی، علوم، حقوق

ب) میزان درآمد خانواده

پ) مدت زمان صرف‌شده برای دویدن ۲۰۰ متر

ت) طبقه‌بندی افراد از نظر مذهب

ث) تعیین ۵ نفر اول در مسابقه دو و میدانی

ج) نمرات آزمون هوش استاندارد شده

چ) تعیین سن افراد

ح) طبقه‌بندی رشته‌های دانشگاهی

خ) اندازه‌گیری قد به سانتی‌متر

د) اندازه‌گیری پیشرفت تحصیلی به صورت قبول و رد

ذ) اندازه‌گیری درجه ذوب مواد مختلف

ر) تعیین ارجحیت رنگ اتومبیل

ز) سطح سواد والدین

ژ) شماره کتاب‌ها در کتابخانه

۲ ـ جدول زیر را کامل کنید:

حدود ارزش واقعی	واحد اندازه‌گیری	ارزش گزارش‌شده
		۲۳۱
		۴۸۰
		۵/۲
		۱۳۲/۰
		۱۴/۰۲
		۱۸/۷۲۵

۳ـ عبارت‌های زیر را به صورت حاصل‌جمع یا علامت مجموع (Σ) بنویسید:

الف) $C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_nX_n =$

ب) $a^2Y_1 + a^2Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a^2Y_8 - 5 =$

پ) $C_1(X_1 - a) + C_2(X_2 - a) + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{10}(X_{10} - a) =$

ت) $\left(aX_3^2 + aX_4^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + aX_7^2\right)^2 + 10 =$

ث) $b(X_1 - a)^2 + b(X_2 - a)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b(X_6 - a)^2 =$

ج) $(aX_1Y_1^2 + aX_2Y_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + aX_8Y_8^2 - 4)^2 =$

چ) $a[(b_1X_1 - 2)^2 + (b_2X_2 - 2)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (b_7X_7 - 2)^2] =$

٤ـ حاصل‌جمع (گسترده) عبارت‌های زیر را بنویسید:

الف) $\sum_{i=2}^{7} aX_i^2 - 3 =$

ب) $\sum_{i=2}^{5} (X_i^2 - 4)^2 =$

پ) $a\sum_{i=5}^{9} 3X_i^2 - 4 =$

ت) $a\left[\sum_{i=3}^{8} (X_iY_i - 2)^2\right] =$

ث) $\left(\sum_{i=2}^{6} aX_i^2 - 10\right)^2 =$

ج) $5\left[\left(\sum_{i=2}^{5} X_i + 4\right)^2\right]$

۵ـ اگر $X_1 = ۴$، $X_2 = ۲$ ، $X_3 = ۵$ ، $X_4 = ۱$، $X_5 = ۶$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $۲\sum_{i=۱}^{۳}(X_i - ۲)^۲ =$

ب) $\sum_{i=۳}^{۵}۳(X_i^۲ + ۱) =$

پ) $\sum_{i=۲}^{۴}۳X_i - ۶ =$

ت) $\left(\sum_{i=۱}^{۴}۲X_i^۲ - ۱\right)^۲$

ث) $\left(۲\sum_{i=۳}^{۵}X_i\right)^۲ + ۲ =$

۶ـ اگر $\sum_{i=۲}^{۵}X_i = ۱۲$ ، $\sum_{i=۲}^{۵}Y_i = ۱۰$، $\sum_{i=۲}^{۵}X_iY_i = ۱۵$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\sum_{i=۲}^{۵}۳(X_i - ۴) =$

ب) $۲\sum_{i=۲}^{۵}۴X_i(Y_i + ۱) =$

پ) $\sum_{i=۲}^{۵}۴(X_i + ۱)(Y_i - ۲) =$

ت) $۲\left(\sum_{i=۲}^{۵}X_i - ۵\right)^۲ =$